2025 年湖北

1. PET（正电子发射断层成像）是核医学科重要的影像学诊断工具，其检查原理是将含放射性同位素（如：${}^{18}_{9}\mathrm{F}$）的物质注入人体参与人体代谢，从而达到诊断的目的。${}^{18}_{9}\mathrm{F}$ 的衰变方程为 ${}^{18}_{9}\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{X} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} + {}^{0}_{0}\nu$，其中 ${}^{0}_{0}\nu$ 是中微子。已知 ${}^{18}_{9}\mathrm{F}$ 的半衰期是 110 分钟。下列说法正确的是 (C)

A. X 为 ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$

B. 该反应为核聚变反应

C. 1 克 ${}^{18}_{9}\mathrm{F}$ 经 110 分钟剩下 0.5 克 ${}^{18}_{9}\mathrm{F}$

D. 该反应产生的 ${}^{0}_{0}\nu$ 在磁场中会发生偏转

> A．根据质量数与电荷数守恒可知，该物质为 ${}^{18}_{8}\mathrm{O}$，故 A 错误；
>
> B．核聚变是轻核结合成重核的过程（如氢弹原理）。本题中的衰变是单个原子核自发转变为另一种原子核，属于放射性衰变（具体为 β^+ 衰变），而非核聚变，故 B 错误；
>
> C. $1\,\mathrm{g}$ 该物质经过 $110\,\mathrm{min}$ 即一个衰变周期，则有一半发生衰变，该物质质量变为 $0.5\,\mathrm{g}$，故 C 正确；
>
> D．${}^{0}_{0}\nu$ 不带电，在磁场中不偏转，故 D 错误。
>
> 故选 C。

2. 甲、乙两行星绕某恒星做圆周运动，甲的轨道半径比乙的小。忽略两行星之间的万有引力作用，下列说法正确的是 (A)

A. 甲运动的周期比乙的小

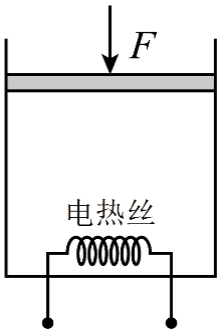
B. 甲运动的线速度比乙的小

C. 甲运动的角速度比乙的小

D. 甲运动的向心加速度比乙的小

> 根据卫星做圆周运动的向心力等于万有引力可知
>
> $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r = ma$
>
> 可得 $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$，$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$，$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$，$a = \frac{GM}{r^2}$
>
> 因 $r_{甲} < r_{乙}$，可知卫星甲、乙运动的周期 $T_{甲} < T_{乙}$，线速度关系 $v_{甲} > v_{乙}$，角速度关系 $\omega_{甲} > \omega_{乙}$，向心加速度关系 $a_{甲} < a_{乙}$。
>
> 故选 A。

3. 如图所示，内壁光滑的汽缸内用活塞密封一定量理想气体，汽缸和活塞均绝热。用电热丝对密封气体加热，并在活塞上施加一外力 F，使气体的热力学温度缓慢增大到初态的 2 倍，同时其体积缓慢减小。关于此过程，下列说法正确的是 (B)



A. 外力 F 保持不变　　B. 密封气体内能增加

C. 密封气体对外做正功　　D. 密封气体的末态压强是初态的 2 倍

A．气体温度升高，体积减小，根据 $\frac{pV}{T}=C$ 可知气体压强变大，则外力 F 增加，选项 A 错误；

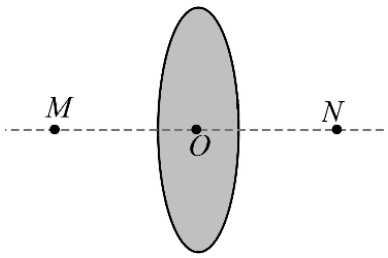
B．气体温度升高，则气体内能变大，即 ΔU 增加，选项 B 正确；

C．气体体积减小，则外界对气体做功，选项 C 错误；

D．根据 $\frac{pV}{T}=C$，热力学温度变为原来的 2 倍，体积减小，则气体压强大于原来的 2 倍，选项 D 错误。

故选 B。

4. 如图所示，在磁感应强度大小为 B 的匀强磁场中，放置一通电圆线圈，圆心为 O 点，线圈平面与磁场垂直。在圆线圈的轴线上有 M 和 N 两点，它们到 O 点的距离相等。已知 M 点的总磁感应强度大小为零，则 N 点的总磁感应强度大小为 (A)



A. 0　　B. B　　C. $2B$　　D. $3B$

由右手螺旋定则及对称性可知，环形电流在 N 点产生的磁场，磁感应强度与 M 点等大同向。由于 M 点磁感应强度为零，由矢量合成法则可知环境中匀强磁场与 M 点磁场等大反向，即匀强磁场与 N 点的磁场等大反向，N 点的磁感应强度为 0。

故选 A。

【补充】

注意这里，站在 N 点或 M 点看环形电流，一个顺时针，一个逆时针，两者电流方向刚好相反，由于两者方向是相对的，因而在外看来是同向的。

5. 如图 a 所示，相距 L 的两足够长平行金属导轨放在同一水平面内，两长度均为 L、电阻均为 R 的金属棒 ab、cd 垂直跨放在两导轨上，金属棒与导轨接触良好。导轨电阻忽略不计。导轨间存在与导轨平面垂直的匀强磁场，其磁感应强度大小 B 随时间变化的图像如图 b 所示，$t=T$ 时刻，$B=0$。$t=0$ 时刻，两棒相距 x_0，ab 棒速度为零，cd 棒速度方向水平向右，并与棒垂直，则 $0\sim T$ 时间内流过回路的电荷量为 (B)

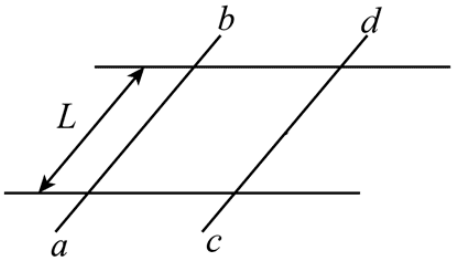


图 a

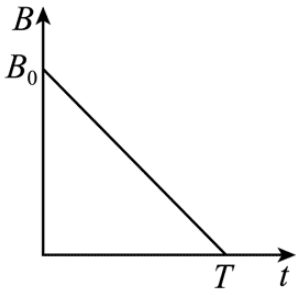


图 b

A. $\frac{B_0Lx_0}{4R}$　　B. $\frac{B_0Lx_0}{2R}$　　C. $\frac{B_0Lx_0}{R}$　　D. $\frac{2B_0Lx_0}{R}$

通过导体的电荷量 $q=\overline{I}\Delta t$

而 $\overline{I}=\frac{\overline{E}}{2R}$

$t=T$ 时，磁感应强度为零，故 $\overline{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{B_0Lx_0-0}{T}$

联立以上各式，可得 $q=\frac{B_0Lx_0}{2R}$

故选 B。

【补充】

由 $\mathrm{d}q=\frac{\mathrm{d}\Phi}{R_{总}}$，得 $\Delta q=\frac{\Delta\Phi}{R_{总}}$，而 $\Delta\Phi$ 只与初未磁通量有关，与中间的变化过程无关。

6. 某网球运动员两次击球时，击球点离网的水平距离均为 L，离地高度分别为 $L/2$ 、L，网球离开球拍瞬间的速度大小相等，方向分别斜向上、斜向下，且与水平方向夹角均为 θ。击球后网球均刚好直接掠过球网，运动轨迹平面与球网垂直，忽略空气阻力，$\tan\theta$ 的值为 (C)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

网球水平方向上做匀速直线运动，有 $t=\frac{L}{v_0\cos\theta}$

设球网高度为 h，则对 A 点发出的球，有

$L-h=v_0\sin\theta\cdot t+\frac{1}{2}gt^2$

对 B 点发出的球，有 $\frac{L}{2}-h=-v_0\sin\theta\cdot t+\frac{1}{2}gt^2$

联立以上各式，可得 $\tan\theta=\frac{1}{4}$

故选 C。

7. 一个宽为 L 的双轨推拉门由两扇宽为 $L/2$ 的门板组成。门处于关闭状态，其俯视图如图 a 所示。某同学用与门板平行的水平恒定拉力作用在一门板上，一段时间后撤去拉力，该门板完全运动到另一边，且恰好不与门框发生碰撞，其俯视图如图 b 所示。门板在运动过程中受到的阻力与其重力大小之比为 μ，重力加速度大小为 g。若要门板的整个运动过程用时尽量短，则所用时间趋近于 (B)

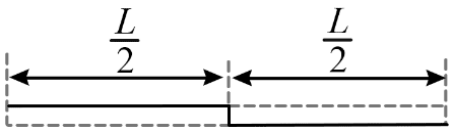


图 a


图 b

A. $\sqrt{\frac{L}{2\mu g}}$　　B. $\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$　　C. $\sqrt{\frac{2L}{\mu g}}$　　D. $2\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$

设拉力为 F，作用时间为 t_1，撤去外力后 AB 运动的时间为 t_2，AB 运动过程的最大速度为 v_m，则由动量定理，有 $(F-\mu mg)\,t_1=mv_m$

得 $t_1=\frac{mv_m}{F-\mu mg}$

撤销拉力后，有 $\mu mgt_2=mv_m$

得 $t_2=\frac{v_m}{\mu g}$

对于全过程，有 $Ft_1=\mu mgt$

得 $F=\frac{\mu mgt}{t_1}$

对于全过程有 $\frac{L}{2}=\frac{v_m t}{2}$

故 AB 运动的总时间

$t=t_1+t_2=\frac{mv_m}{F-\mu mg}+\frac{v_m}{\mu g}=\frac{mv_m}{\frac{\mu mgt}{t_1}-\mu mg}+\frac{v_m}{\mu g}=\frac{v_m}{\mu g}\cdot\frac{t}{t-t_1}=\frac{v_m t}{\mu g}\cdot\frac{1}{t-t_1}=\frac{L}{\mu g t_2}$

可知当 t_2 越大时，t 越小，当 $t_2=t$ 时，t 取最小值。

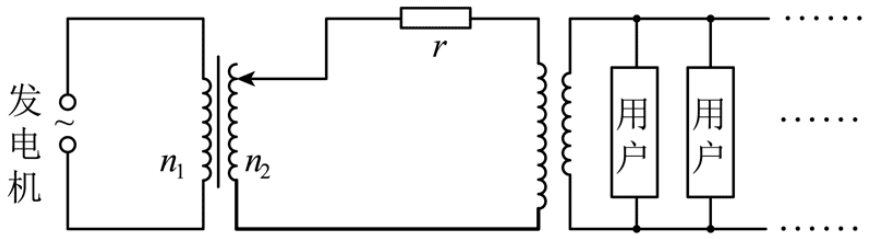
则 $t_{\min}^2=\frac{L}{\mu g}$

则 $t_{\min}=\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$

故选 B。

> 【补充】
>
> 可以使用函数法，但推荐图像法，面积固定找最短底边。

8. 在如图所示的输电线路中，交流发电机的输出电压一定，两变压器均为理想变压器，左侧升压变压器的原副线圈匝数分别为 n_1 和 n_2，两变压器间输电线路电阻为 r。下列说法正确的是（AC）

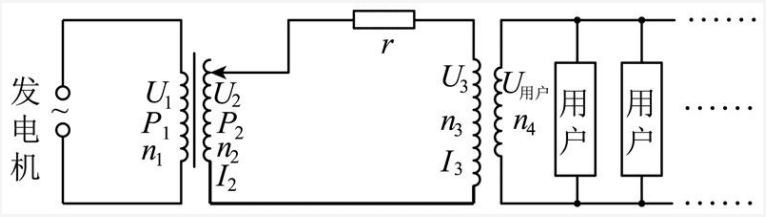


A. 仅增加用户数，r 消耗的功率增大

B. 仅增加用户数，用户端的电压增大

C. 仅适当增加 n_2，用户端的电压增大

D. 仅适当增加 n_2，整个电路消耗的电功率减小

> A．整个电路物理量标注如图
>
> 
>
>
> 设用户端总电阻为 $R_{用户}$，降压器输入端等效为电阻 R_x，则有 $I_3^2R_x = I_4^2R_{用户}$
>
> 因为 $I_3n_3 = I_4n_4$
>
> 其中 $I_2 = I_3$，则对于输电线有
>
> $I_2 = \frac{U_2}{r+R_x}$
>
> $I_2 = \frac{U_2}{r+\left(\frac{n_3}{n_4}\right)^2 R_{用户}}$
>
> 联立整理可得
>
> 仅增加用户数，则 $R_{用户}$ 减小，可知 I_2 增大，根据 $\Delta P = I_2^2r$
>
> 可知 r 消耗的功率增大，故 A 正确；
>
> B．仅增加用户数，I_2 增大，根据 $U_3 = U_2 - I_2r$
>
> 可知 U_3 减小，根据用户端的电压

$U_4=\frac{n_4}{n_3}U_3$

可知用户端的电压减小，故 B 错误；

C．仅适当增加 n_2，根据

$U_2=\frac{n_2}{n_1}U_1$

$I_2=\frac{U_2}{r+\left(\frac{n_3}{n_4}\right)^2R_{用户}}$

可知 U_2 增大，根据

可知 I_2 增大，根据 $U_3=I_2R_x$

$U_4=\frac{n_4}{n_3}U_3$

可知 U_3 增大，根据用户端的电压

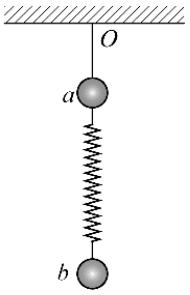
可知用户端的电压增大，故 C 正确；

D．由 C 选项可知，仅适当增加 n_2，I_2 增大，整个电路消耗的电功率 $P_1=P_2=U_2I_2$

由于 U_2 增大，故整个电路消耗的电功率变大，故 D 错误。

故选 AC。

9. 质量均为 m 的小球 a 和 b 由劲度系数为 k 的轻质弹簧连接，小球 a 由不可伸长的细线悬挂在 O 点，系统处于静止状态，如图所示。将小球 b 竖直下拉长度 l 后由静止释放。重力加速度大小为 g，忽略空气阻力，弹簧始终在弹性限度内。释放小球 b 后（AD）



A. 小球 a 可能会运动

B. 若小球 b 做简谐运动，则其振幅为 $\frac{l}{2}$

C. 当且仅当 $l\leqslant\frac{mg}{k}$ 时，小球 b 才能始终做简谐运动

D. 当且仅当 $l\leqslant\frac{2mg}{k}$ 时，小球 b 才能始终做简谐运动

B. 如果 A 球不动而 B 球单独振动则 B 球做简谐振动，简谐振动的平衡位置合力为零，即 B 球初始时刻位置，则可知 B 的振幅为 l，B 错误；

ACD．A 球发生运动的临界条件为弹簧对 A 球向上的弹力大于 A 球的重力，则此时对 A 球有 $kx_0=mg$

对 B 球有此时加速度 $kx_0+mg=ma$

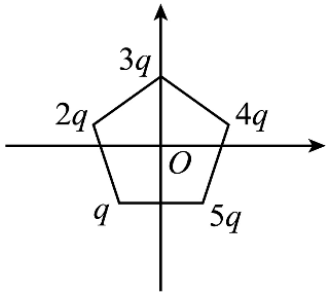
由简谐振动的对称性可得向下拉到最低点松手释放的加速度也为 a，则有 $kl=ma$

解得 $l=\frac{2mg}{k}$

即 $l\leq\frac{2mg}{k}$，否则 A 球会发生运动，AD 正确，C 错误。

故选 AD。

10. 如图所示，在 xOy 平面内有一以 O 点为中心的正五边形，顶点到 O 点的距离为 R。在正五边形的顶点上顺时针方向依次固定电荷量为 q、$2q$、$3q$、$4q$、$5q$ 的正点电荷，且电荷量为 $3q$ 的电荷在 y 轴正半轴上。静电力常量为 k，则 O 点处的电场强度（ AD ）



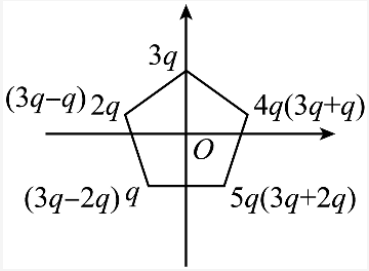
A. 方向沿 x 轴负方向

B. 方向与 x 轴负方向成 18° 夹角斜向下

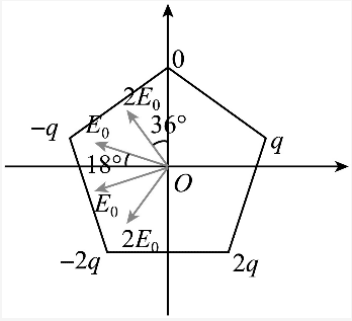
C. 大小为 $\frac{2kq}{R^2}(\cos 54^\circ+\cos 18^\circ)$

D. 大小为 $\frac{2kq}{R^2}(2\cos 54^\circ+\cos 18^\circ)$

由题意可知，如图



将五个点电荷等效成



五个点电荷与 O 点距离为 R，设 $E_0=\frac{kq}{R^2}$

则 O 点场强大小为 $E=2\times 2E_0\cos 54^\circ+2E_0\cos 18^\circ$

代入可得 $E=\frac{2kq}{R^2}\left(2\cos 54^\circ+\cos 18^\circ\right)$

方向沿 x 轴负方向；

故选 AD。

【补充】

这里化到上面的最简后有些同学还会继续分解，如左边是两 $-q$，右边是两 $+q$，下面是 $-q$ 和 $+q$，由此易得 $E=\frac{2kq}{R^2}(2\cos 36^\circ\cos 18^\circ+\cos 54^\circ)$，积化和差后与上面答案一样。

11. 某实验小组为测量一节干电池的电动势 E 和内阻 r，设计了如图 a 所示电路，所用器材如下：干电池、智能手机、电流传感器、定值电阻 R_0、电阻箱、开关、导线等。按电路图连接电路，将智能手机与电流传感器通过蓝牙无线连接，闭合开关 S，逐次改变电阻箱的阻值 R，用智能手机记录对应的电流传感器测得的电流 I。回答下列问题：

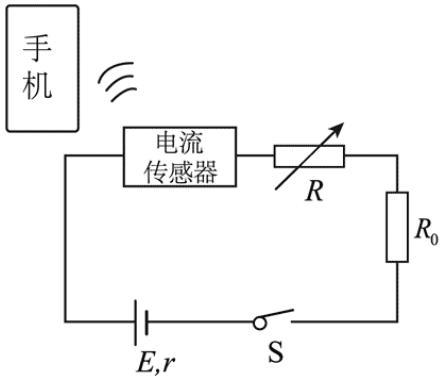


图 a

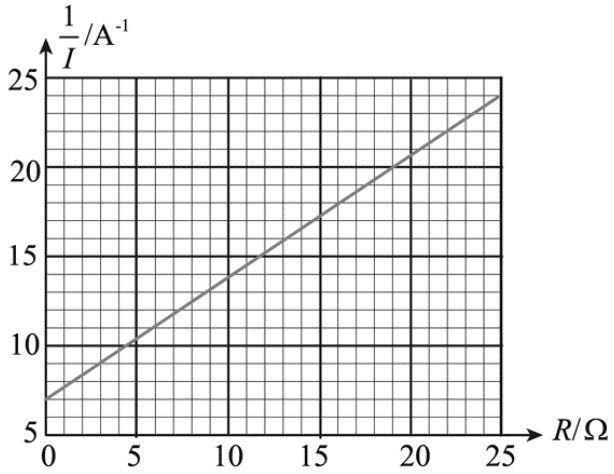


图 b

(1) R_0 在电路中起 保护 （填“保护”或“分流”）作用。

(2) $\frac{1}{I}$ 与 E、r、R、R_0 的关系式为 $\frac{1}{I}=\frac{R}{E}+\frac{R_0+r}{E}$ 。

(3) 根据记录数据作出 $\frac{1}{I}-R$ 图像，如图 b 所示。已知 $R_0=9.0\,\Omega$，可得 $E=1.47$ V（保留三位有效数字），$r=1.3\,\Omega$（保留两位有效数字）。

(4) 电流传感器的电阻对本实验干电池内阻的测量结果 有（填“有”或“无”）影响。

(1) 保护 (2) $\frac{R}{E}+\frac{R_0+r}{E}$ (3) 1.47，1.3 (4) 有

(1) R_0 与电阻箱串联，可知，R_0 在电路中起保护作用。

(2) 根据闭合电路欧姆定律 $E=I(R+R_0+r)$

化简可得 $\frac{1}{I}=\frac{R}{E}+\frac{R_0+r}{E}$

(3) 结合上述有 $\frac{1}{I}=\frac{R}{E}+\frac{R_0+r}{E}$

结合图（b）有 $\frac{1}{E}=\frac{24-7}{25-0}\,\mathrm{V}^{-1}$，$\frac{R_0+r}{E}=7\,\mathrm{A}^{-1}$

解得 $E\approx 1.47\,\mathrm{V}$，$r\approx 1.3\,\Omega$

(4) 当电流传感器有内阻时，所测的电源内阻 $r_{测}=r_{真}+r_{传}$，导致电源内阻测量值偏大，即电流传感器的电阻对本实验干电池内阻的测量结果有影响。

12. 某同学利用如图 a 所示的实验装置来测量重力加速度大小 g。细绳跨过固定在铁架台上不可转动的小圆柱体，两端各悬挂一个重锤。实验步骤如下：

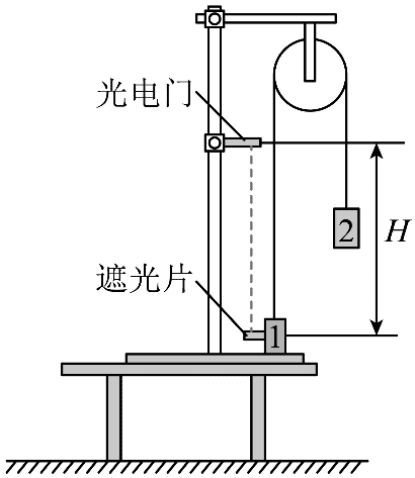


图 a

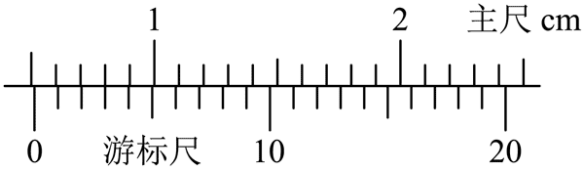


图 b

① 用游标卡尺测量遮光片的宽度 d。

② 将遮光片固定在重锤 1 上，用天平测量重锤 1 和遮光片的总质量 m、重锤 2 的质量 M（$M>m$）。

③ 将光电门安装在铁架台上，将重锤 1 压在桌面上，保持系统静止，重锤 2 离地面足够高。用刻度尺测量遮光片中心到光电门的竖直距离 H。

④ 启动光电门，释放重锤 1，用毫秒计测出遮光片经过光电门所用时间 t。

⑤ 根据上述数据求出重力加速度 g。

⑥ 多次改变光电门高度，重复步骤，求出 g 的平均值。

回答下列问题：

(1) 测量 d 时，游标卡尺的示数如图 b 所示，可知 0.515 cm。

(2) 重锤 1 通过光电门时的速度大小为 $v=\frac{d}{t}$（用遮光片 d、t 表示）。若不计摩擦，g 与 m、M、d、t、H 的关系式为 $g=\frac{(M+m)d^2}{2(M-m)Ht^2}$。

(3) 实验发现，当 M 和 m 之比接近于 1 时，g 的测量值明显小于真实值。主要原因是圆柱体表面不光滑，导致跨过圆柱体的绳两端拉力不相等。理论分析表明，圆柱体与绳之间的动摩擦因数很小时，跨过圆柱体的绳两端拉力差 $\Delta T = 4\gamma\frac{Mm}{M+m}g$，其中 γ 是只与圆柱体表面动摩擦因数有关的常数。保持 $M+m=2m_0$ 不变，其中 $M=(1+\beta)m_0$，$m=(1-\beta)m_0$。β 足够小时，重锤运动的加速度大小可近似表示为 $a=(\beta-\gamma)g$。调整两重锤的质量，测得不同 β 时重锤的加速度大小 a，结果如下表。根据表格数据，采用逐差法得到重力加速度大小 $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$（保留三位有效数字）。

β	0.04	0.06	0.08	0.10
$a\ (\mathrm{m/s^2})$	0.084	0.281	0.477	0.673

(1) 0.515 (2) $\frac{d}{t}$，$\frac{(M+m)d^2}{2(M-m)Ht^2}$ (3) 9.81

(1) 根据游标卡尺的读数规律，该游标卡尺的读数为 $5\,\mathrm{mm}+0.05\times3\,\mathrm{mm}=5.15\,\mathrm{mm}=0.515\,\mathrm{cm}$。

(2) 根据光电门的测速原理，重锤 1 通过光电门时的速度大小为 $v=\frac{d}{t}$。

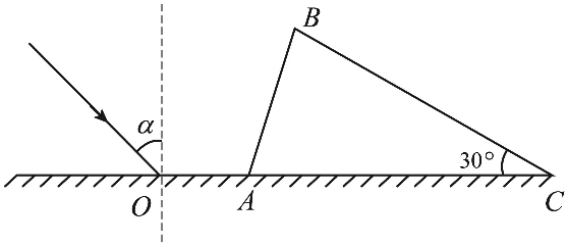
对重锤 1 与重锤 2 构成的系统进行分析，根据系统机械能守恒定律有 $(M-m)gH=\frac{1}{2}(M+m)v^2$，其中 $v=\frac{d}{t}$。解得 $g=\frac{(M+m)d^2}{2(M-m)Ht^2}$。

(3) 由于 γ 是只与圆柱体表面动摩擦因数有关的常数，且有 $a=(\beta-\gamma)g=\beta g-\gamma g$。取表格从左至右四组数据分别为 a_1、a_2、a_3、a_4 和对应的 β_1、β_2、β_3、β_4，利用表格中的数据，根据逐差法有 $a_4+a_3-a_2-a_1=(\beta_4+\beta_3-\beta_2-\beta_1)g$，带入数据可则重力加速度 $g=9.81\,\mathrm{m/s^2}$。

13. 如图所示，三角形 ABC 是三棱镜的横截面，$AC=BC$，$\angle C=30°$，三棱镜放在平面镜上，AC 边紧贴镜面。在纸面内，一光线入射到镜面 O 点，入射角为 α，O 点离 A 点足够近。已知三棱镜的折射率为 $\sqrt{2}$。

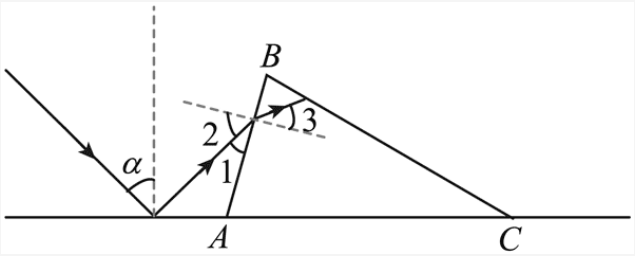
(1) 当 $\alpha=45°$ 时，求光线从 AB 边射入棱镜时折射角的正弦值；

(2) 若光线从 AB 边折射后直接到达 BC 边，并在 BC 边刚好发生全反射，求此时的 α 值。



(1) $\sqrt{6}/4$ (2) $60°$

(1) 作出光路图，如图所示



由几何关系可知

$\angle BAC = \frac{180°-\angle C}{2} = 75°$

$\angle 1 = \angle BAC - (90° - \alpha) = 30°$

所以在 AB 边的入射角为 $\angle 2 = 90° - \angle 1 = 60°$

由光的折射定律 $n = \frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 3}$

解得光线从 AB 边射入棱镜时折射角的正弦值为 $\sin\angle 3 = \frac{\sqrt{6}}{4}$

(2) 根据 $\sin C' = \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

可得 $C' = 45°$

则 AB 边的折射角为 $\angle 3' = 90° - [180° - (75° + 90° - 45°)] = 30°$

根据折射定律可知 AB 边的入射角满足 $n = \frac{\sin\angle 2'}{\sin\angle 3'}$

解得 $\angle 2' = 45°$

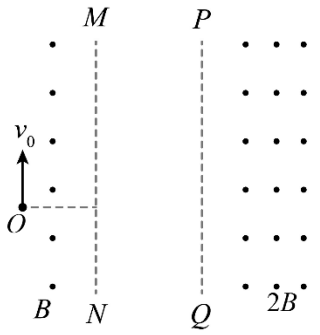
根据几何关系可知恰好发生全反射时的入射角为 $\alpha' = 90° - [\angle BAC - (90° - \angle 2')] = 60°$

14. 如图所示，两平行虚线 MN、PQ 间无磁场。MN 左侧区域和 PQ 右侧区域内均有垂直于纸面向外的匀强磁场，磁感应强度大小分别为 B 和 $2B$。一质量为 m、电荷量为 q 的带正电粒子从 MN 左侧 O 点以大小为 v_0 的初速度射出，方向平行于 MN 向上。已知 O 点到 MN 的距离为 $\frac{3mv_0}{2qB}$，粒子能回到 O 点，并在纸面内做周期性运动。不计重力，求：

(1) 粒子在 MN 左侧区域中运动轨迹的半径；

(2) 粒子第一次和第二次经过 PQ 时位置的间距；

(3) 粒子的运动周期。



(1) $R=\frac{mv_0}{qB}$ (2) $x=\frac{\sqrt{3}mv_0}{2qB}$ (3) $\frac{5\pi m}{3qB}+\frac{\sqrt{3}m}{qB}$

(1) 粒子在左侧磁场中运动，根据洛伦兹力提供向心力有 $qv_0B=\frac{mv_0^2}{R}$

可得 $R=\frac{mv_0}{qB}$

(2) 粒子在左侧磁场运动，设从 MN 射出时速度方向与 MN 的夹角为 θ，由于 O 到 MN 的距离 $d=\frac{3mv_0}{2qB}$，结合 $R=\frac{mv_0}{qB}$，根据几何关系可知 $\theta=60°$；

粒子在 MN 和 PQ 之间做匀速直线运动，所以粒子从 PQ 进入右侧磁场时与 PQ 的夹角 $\theta=60°$；

粒子在右侧磁场做匀速圆周运动有 $qv_0\cdot 2B=\frac{mv_0^2}{R'}$

解得 $R'=\frac{mv_0}{2qB}$

根据几何关系可知粒子第一次和第二次经过 PQ 时位置的间距 $x=\sqrt{3}R'=\frac{\sqrt{3}mv_0}{2qB}$。

(3) 由图可知粒子在左边磁场运动的时间

$t_1=\frac{2}{3}T_1=\frac{2}{3}\times\frac{2\pi m}{qB}=\frac{4\pi m}{3qB}$

粒子在右边磁场运动的时间

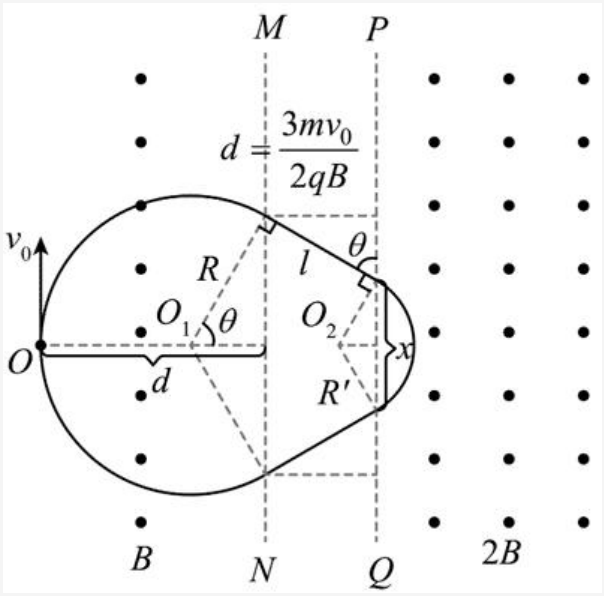
$t_2=\frac{1}{3}T_2=\frac{1}{3}\times\frac{2\pi m}{2qB}=\frac{\pi m}{3qB}$

根据对称性可知粒子在 MN 左侧进出磁场的距离

$x_0=\sqrt{3}R=\frac{\sqrt{3}mv_0}{qB}$

所以粒子从 MN 到 PQ 过程中运动的距离为

$l=\frac{\sqrt{3}R-\sqrt{3}R'}{2\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}mv_0}{2qB}$



粒子在 MN 和 PQ 之间运动的时间 $t_3=\frac{2l}{v_0}=\frac{\sqrt{3}m}{qB}$

综上可知粒子完成完整运动回到 O 点的周期为 $T=t_1+t_2+t_3=\frac{5\pi m}{3qB}+\frac{\sqrt{3}m}{qB}$。

15. 如图所示，一足够长的平直木板放置在水平地面上，木板上有 $3n$（n 是大于 1 的正整数）个质量均为 m 的相同小滑块，从左向右依次编号为 1、2、$\cdots$、$3n$，木板的质量为 nm。相邻滑块间的距离均为 L，木板与地面之间的动摩擦因数为 μ，滑块与木板间的动摩擦因数为 2μ。初始时木板和所有滑块均处于静止状态。现给第 1 个滑块一个水平向右的初速度，大小为 $\sqrt{\beta\mu gL}$（β 为足够大常数，g 为重力加速度大小）。滑块间的每次碰撞时间极短，碰后滑块均会粘在一起继续运动。最大静摩擦力等于滑动摩擦力。

(1) 求第 1 个滑块与第 2 个滑块碰撞前瞬间，第 1 个滑块的速度大小;

(2) 记木板滑动前第 j 个滑块开始滑动时的速度为 v_j，第 $j+1$ 个滑块开始滑动时的速度为 v_{j+1}。用已知量和 v_j 表示 v_{j+1}。

(3) 若木板开始滑动后，滑块间恰好不再相碰，求 β 的值。

（参考公式：$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$）



(1) $v_1=\sqrt{(\beta-4)\mu gL}$

(2) $v_{j+1}=\frac{j}{j+1}\sqrt{v_j^2-4\mu gL}$

(3) $\beta=\frac{8n}{2n-1}(2n+1)^2+\frac{4}{3}n(2n+1)(4n+1)=\frac{4n(2n+1)(8n^2+10n+5)}{3(2n-1)}$

(1) 滑块 1 运动时，对木板的摩擦力为 $f_1 = 2\mu mg$

地面对木板的摩擦力为 $f_2 = 4\mu nmg$

所以此过程中木板保持不动；每个滑块之间距离为 L，所以对滑块 1 根据动能定理有

$-2\mu mgL = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

解得 $v_1 = \sqrt{(\beta - 4)\mu gL}$

(2) 滑块间碰撞时间极短，碰后滑块粘在一起运动，若长木板不动，第 j 个滑块开始运动时加速度为 $a_j = \frac{2\mu \cdot jmg}{jm} = 2\mu g$

根据运动学公式，第 j 个滑块开始滑动到和第 $j+1$ 个滑块碰撞时，有 $v_j^2 - v_j'^2 = 2a_jL$

第 j 个滑块和第 $j+1$ 个滑块碰撞过程中动量守恒有 $jmv_j' = (j+1)mv_{j+1}$

联立可得 $v_{j+1} = \frac{j}{j+1}\sqrt{v_j^2 - 4\mu gL}$

(3) 当第 k 个木块开始滑动时，木板恰好要滑动，此时有 $2\mu \cdot kmg = \mu(nm + 3nm)g$

解得 $k = 2n$（n 为整数）

则第 $k+1$ 个（即 $2n+1$）木块开始滑动时，木板开始滑动，要刚好不发生下一次碰撞，假设木板和剩下的木块不发生相对滑动，则

$2\mu(2n+1)mg - \mu(nm + 3nm)g = [nm + (n-1)m]\, a_{木}$

则 $a = \frac{2\mu g}{2n-1} < 2\mu g$

木板和剩下的木块不发生相对滑动。

$a_{k+1} = \frac{2\mu \cdot (k+1)mg}{(k+1)m} = 2\mu g$

对前面 $k+1$ 个（即 $2n+1$）木块，有

木板开始滑动时，刚好不发生下一次碰撞，则对前面 $k+1$ 个木块和 $k+2$ 个木块共速，且相对位移恰好为 L，则

$\frac{v_{k+1}^2 - v_{共}^2}{2a_{k+1}} - \frac{v_{共}^2}{2a} = L$

则 $v_{k+1}^2 = 2nv_{共}^2 + 4\mu gL$

又 $v_{共} = at = v_{k+1} - 2\mu gt$

则 $v_{共} = \frac{v_{k+1}}{2n}$

则 $v_{k+1}^2 = \frac{8n\mu gL}{2n-1}$

$j = 1$ 时，第一个滑块开始运动的速度 $v_0 = \sqrt{\beta\mu gL}$，则 $v_0^2 = \beta\mu gL$

$j = 2$ 时，根据动量守恒定律可得 $mv_1 = 2mv_2$

可得第 2 个滑块开始运动的速度 $v_2=\frac{1}{2}\sqrt{(\beta-4)\mu gL}$

则 $4v_2^2=\beta\mu gL-4\mu gL$

由第二问可得，$(j+1)^2v_{j+1}^2=j^2v_j^2-4j^2\mu gL$，则对第 3 个滑块到第 $k+1$ 个滑块有

$9v_3^2=4\times v_2^2-4\times 4\mu gL$

$16v_4^2=9v_3^2-9\times 4\mu gL$

$25v_5^2=16\times v_4^2-16\times 4\mu gL$

……

$(k+1)^2v_{k+1}^2=k^2v_k^2-k^2\times 4\mu gL$

将从 $j=2$ 到 $j=k+1$ 相关方程累积求和可得

$(k+1)^2v_{k+1}^2=\beta\mu gL-4\mu gL\left[1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2\right]=\beta\mu gL-\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}\mu gL$

联立 $v_{k+1}^2=\frac{8n\mu gL}{2n-1}$，$k=2n$

可得 $\beta=\frac{4n(2n+1)(8n^2+10n+5)}{3(2n-1)}$

【补充】

整个题目过程比较清晰，计算有点繁琐，最后一问以木板为参考系，考虑惯性力，可以简化计算。